Proof Theory Symposion Kiel 1974, J. Diller and G.H. Müller, eds., Lecture Notes in Mathematics vol. 500, Springer (Berlin, 1975), 257–263.

CHURCH ROSSER THEOREM FÜR λ-KALKÜLE MIT UNENDLICH LANGEN TERMEN

Herrn Professor Dr. Kurt Schütte zu seinem 65. Geburtstag gewidmet

W. Maaß

In dieser Arbeit wird mittels Transfiniter Induktion das Church Rosser Theorem für einen typenfreien λ-Kalkül mit unendlich langen Termen bewiesen. Der Beweis läßt sich unmittelbar ausdehnen auf die meisten vorliegenden λ-Kalküle mit unendlich langen Termen (mit oder ohne Typen), die noch zusätzliche Regeln zur Termbildung und Reduktion enthalten. Wir geben am Schluß an, wie die auftretenden Ordinalzahlen bei beweistheoretischen Anwendungen genügend klein gehalten werden können.

Für λ-Kalküle dieser Art mit Typen hat Girard in [1] einen Beweis mit Hilfe von Fundierungsprädikaten angegeben. Für den durch Weglassen der Reduktionsregel $\langle a_i \rangle \ \underline{n} \succ a_n$ entstehenden Kalkül haben Barendregt und Schwichtenberg das Church Rosser Theorem mit Hilfe von Ordinalzahlen bewiesen (unveröffentlicht). Wir benutzen beim Beweis die von Martin-Löf und Tait für den endlichen λ-Kalkül entwickelten Methoden (siehe Stenlund [3]).

Definition der Terme :

1) 0 , S und die Variablen $x_1, x_2, ..$ sind Terme.
2) Sind a und b Terme, so sind auch (λxa) und (ab) Terme.
3) Sind a_i für alle $i \in \omega$ Terme, so ist auch $\langle a_i \rangle$ ein Term.

Definition der Länge eines Terms :

1) $|0| = |S| = |x_i| = 0$.
2) $|\lambda xa| = |a|+1$, $|ab| = \max(|a|,|b|)+1$.
3) $|\langle a_i \rangle| = \sup(|a_i|+1)$.

Mitteilungszeichen :

i,j,k,m,n für natürliche Zahlen; $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ für abzählbare Ordinalzahlen; a,b,c,d,e für Terme; $\underline{n}$ für Terme der Gestalt (S(S..(SO)..)) mit n-maligem Auftreten von S .

Unser Ziel ist, das Church Rosser Theorem für den folgenden Reduktionskalkül $\triangleright$ zu beweisen :

1) $a \triangleright a$

2) $(\lambda x a)\, b \triangleright a_x[b]$

3) $\langle a_i\rangle\, \underline{n} \triangleright a_n$

4) $(\langle a_i\rangle\, b)\, c \triangleright \langle a_i\ c\rangle\, b$

5) $a \triangleright a'$, $b \triangleright b'$ => $ab \triangleright a'b'$, $\lambda x a \triangleright \lambda x a'$

6) $a_i \triangleright a_i'$ für alle $i \in \omega$ => $\langle a_i\rangle \triangleright \langle a_i'\rangle$

7) $a \triangleright b$, $b \triangleright a'$ => $a \triangleright a'$.

Wir geben einen zu diesem Kalkül äquivalenten Reduktionskalkül $\triangleright$ an, bei dem den einzelnen Reduktionen Ordinalzahlen als "Reduktionsordnungen" zugeordnet sind. Das Church Rosser Theorem für den Kalkül $\triangleright$ läßt sich dann durch Induktion über diese Reduktionsordnungen beweisen.

Reduktionen mit Reduktionsordnungen :

(wir schreiben $\underset{\alpha}{\triangleright}$ anstatt $\underset{\alpha,1}{\triangleright}$)

(1) $a \underset{\alpha}{\triangleright} a$ für alle α

(2) $a \underset{\alpha}{\triangleright} a'$ und $b \underset{\alpha}{\triangleright} b'$ => $(\lambda x a)\, b \underset{\alpha}{\triangleright} a'_x[b']$

(3) $\langle a_i\rangle \underset{\alpha}{\triangleright} \langle a_i'\rangle$ => $\langle a_i\rangle\, \underline{n} \underset{\alpha}{\triangleright} a_n'$

(4) $\langle a_i\rangle \underset{\alpha}{\triangleright} \langle a_i'\rangle$, $b \underset{\alpha}{\triangleright} b'$, $c \underset{\alpha}{\triangleright} c'$ =>

$(\langle a_i\rangle\, b)\, c \underset{\alpha}{\triangleright} \langle a_i'\ c'\rangle\, b'$

(5) $a \underset{\alpha}{\triangleright} a'$, $b \underset{\alpha}{\triangleright} b'$ => $ab \underset{\alpha}{\triangleright} a'b'$

(6) $a \underset{\alpha}{\triangleright} a'$ => $\lambda x a \underset{\alpha}{\triangleright} \lambda x a'$

(7) $a_i \underset{\alpha}{\rhd} a'_i$ für alle $i \in \omega$ $\Rightarrow$ $\langle a_i \rangle \underset{\alpha}{\rhd} \langle a'_i \rangle$

(8) $a \underset{\alpha}{\rhd} b$ nach einer der Regeln (1),..,(7) und $b \underset{\beta,n}{\rhd} a'$

mit $\beta < \alpha$ $\Rightarrow$ $a \underset{\alpha}{\rhd} a'$

(9) $a \underset{\alpha}{\rhd} b$ und $b \underset{\alpha,n}{\rhd} a'$ $\Rightarrow$ $a \underset{\alpha,n+1}{\rhd} a'$.

<u>Bemerkungen:</u> Anstatt der Regel (8) könnte man bei den Regeln (1)-(7) jeweils eine anschließende Reduktion $\underset{\beta,n}{\rhd}$ mit $\beta < \alpha$ zulassen.

Wir schreiben $a \overset{j}{\underset{\alpha,n}{\rhd}} a'$ um mitzuteilen, daß $a \underset{\alpha,n}{\rhd} a'$ zuletzt nach Regel (j) erschlossen wurde.

<u>Lemma 1 :</u>

1. $c \underset{\beta,n}{\rhd} c'$ $\Rightarrow$ $c \underset{\alpha}{\rhd} c'$ für $\alpha > \beta$.

2. $c \overset{8}{\underset{\alpha}{\rhd}} d$ und $d \underset{\beta,n}{\rhd} c'$ mit $\beta < \alpha$ $\Rightarrow$ $c \underset{\alpha}{\rhd} c'$.

3. $\lambda x a \underset{\alpha,n}{\rhd} \lambda x a'$ $\Rightarrow$ $a \underset{\alpha,n}{\rhd} a'$.

4. $\langle a_i \rangle \underset{\alpha,n}{\rhd} \langle a'_i \rangle$ $\Rightarrow$ $a_i \underset{\alpha,n}{\rhd} a'_i$ für alle $i \in \omega$.

<u>Beweis:</u>

1. $c \overset{1}{\underset{\alpha}{\rhd}} c \underset{\beta,n}{\rhd} c'$ $\Rightarrow$ $c \overset{8}{\underset{\alpha}{\rhd}} c'$.

2. $c \overset{8}{\underset{\alpha}{\rhd}} d$ $\Rightarrow$ $c \overset{j}{\underset{\alpha}{\rhd}} e \underset{\gamma,m}{\rhd} d$ mit $j < 8$ und $\gamma < \alpha$.

Dann gilt nach 1. $e \underset{\delta,k}{\rhd} c'$ mit $\delta := \max(\beta,\gamma) < \alpha$ und $k \in \omega$

$\Rightarrow$ $c \overset{j}{\underset{\alpha}{\rhd}} e \underset{\delta,k}{\rhd} c'$ $\Rightarrow$ $c \overset{8}{\underset{\alpha}{\rhd}} c'$.

3.,4. Induktion nach $\omega\alpha+n$.

<u>Lemma 2 :</u> $a \triangleright a'$ $\Leftrightarrow$ $a \underset{\alpha}{\rhd} a'$ mit einer abzählbaren Ordinalzahl α .

<u>Beweis:</u> "=>" Induktion nach der Definition von $a \;\not\triangleright\; a'$.
Zur Behandlung der Regel 6) wird die Regel (8) des Kalküls $\triangleright$ benutzt (über Lemma 1. 1.) :

$a_i \;\not\triangleright\; a_i'$ für alle $i \in \omega$ => (I.V.) $a_i \underset{\alpha_i}{\triangleright} a_i'$ mit abzählbaren Ordinalzahlen α_i für alle $i \in \omega$ => $a_i \underset{\alpha}{\triangleright} a_i'$ für α mit $\alpha > \alpha_i$ für alle $i \in \omega$ => (Regel (7)) $\langle a_i \rangle \underset{\alpha}{\triangleright} \langle a_i' \rangle$.

"<=" Induktion nach α .

<u>Lemma 3 :</u> $c \underset{\alpha,n}{\triangleright} c'$ und $d \underset{\alpha}{\triangleright} d'$ => $c_x[d] \underset{\alpha,n}{\triangleright} c'_x[d']$.

<u>Beweis:</u> Induktion nach $\omega\alpha+n$.

<u>1) n = 1</u> , also $c \overset{j}{\underset{\alpha}{\triangleright}} c'$ mit $j \in \{1,..,8\}$.

Nebeninduktion nach $|c|$. Die Fälle $j = 1,..,7$ machen keine Schwierigkeiten.

Sei $j = 8$: $c \overset{8}{\underset{\alpha}{\triangleright}} c'$ => $c \overset{k}{\underset{\alpha}{\triangleright}} e \underset{\gamma,m}{\triangleright} c'$ mit $k \in \{1,..,7\}$ und $\gamma < \alpha$. Da die Behauptung für $c \overset{k}{\underset{\alpha}{\triangleright}} e$ schon bewiesen wurde, hat man $c_x[d] \underset{\alpha}{\triangleright} e_x[d']$. Aus der I.V. erhält man wegen $d' \underset{\gamma}{\triangleright} d'$: $e_x[d'] \underset{\gamma,m}{\triangleright} c'_x[d']$. Mit Regel (8) und Lemma 1.2. ergibt sich $c_x[d] \underset{\alpha}{\triangleright} c'_x[d']$.

<u>2)</u> Für $n \neq 1$ folgt die Behauptung unmittelbar aus der I.V. .

<u>Church Rosser Theorem :</u> $c \underset{\alpha,n}{\triangleright} c'$ und $c \underset{\beta,m}{\triangleright} \tilde{c}$ => es gibt einen Term $\hat{c}$ mit $c' \underset{\beta,m}{\triangleright} \hat{c}$ und $\tilde{c} \underset{\alpha,n}{\triangleright} \hat{c}$.

<u>Beweis:</u> Induktion nach $\alpha \# \beta$.

<u>1) n = m = 1</u> Nebeninduktion nach $|c|$.

Zunächst wird die Behauptung für die Fälle $c \; {}^{j}\!\rhd_{\alpha} \; c'$, $c \; {}^{k}\!\rhd_{\beta} \; \tilde{c}$, $j,k \in \{1,..,7\}$ mit Hilfe der Nebeninduktionsvoraussetzung bewiesen. Jeder einzelne Fall ist trivial, sodaß einige Beispiele genügen :

<u>$j = 2$, $k = 5$:</u>

$(\lambda xa)\,b \; {}^{2}\!\rhd_{\alpha} \; a'_x[b']$ mit $a \rhd_{\alpha} a'$ und $b \rhd_{\alpha} b'$.

$(\lambda xa)\,b \; {}^{5}\!\rhd_{\beta} \; (\lambda x\tilde{a})\,\tilde{b}$ mit (nach Lemma 1.3.) $a \rhd_{\beta} \tilde{a}$ und $b \rhd_{\beta} \tilde{b}$. Aus der N.I.V. folgt, daß es Terme $\hat{a}$ und $\hat{b}$ gibt mit $a' \rhd_{\beta} \hat{a}$ und $\tilde{a} \rhd_{\alpha} \hat{a}$ sowie $b' \rhd_{\beta} \hat{b}$ und $\tilde{b} \rhd_{\alpha} \hat{b}$. Es ergibt sich $(\lambda x\tilde{a})\,\tilde{b} \; {}^{2}\!\rhd_{\alpha} \; \hat{a}_x[\hat{b}]$ und nach Lemma 3 $a'_x[b'] \rhd_{\beta} \hat{a}_x[\hat{b}]$.

<u>$j = 3$, $k = 5$:</u>

$\langle a_i \rangle \, \underline{n} \; {}^{3}\!\rhd_{\alpha} \; a'_n$ mit $\langle a_i \rangle \rhd_{\alpha} \langle a'_i \rangle$.

$\langle a_i \rangle \, \underline{n} \; {}^{5}\!\rhd_{\beta} \; \langle \tilde{a}_i \rangle \, \underline{n}$ mit $\langle a_i \rangle \rhd_{\beta} \langle \tilde{a}_i \rangle$.

Aus der N.I.V. folgt: es gibt einen Term $\langle \hat{a}_i \rangle$, sodaß $\langle a'_i \rangle \rhd_{\beta} \langle \hat{a}_i \rangle$, also nach Lemma 1.4. auch $a'_n \rhd_{\beta} \hat{a}_n$, und $\langle \tilde{a}_i \rangle \rhd_{\alpha} \langle \hat{a}_i \rangle$, also $\langle \tilde{a}_i \rangle \, \underline{n} \rhd_{\alpha} \hat{a}_n$.

<u>$j = 4$, $k = 5$:</u>

$(\langle a_i \rangle \, b)\,c \; {}^{4}\!\rhd_{\alpha} \; \langle a'_i \; c' \rangle \, b'$ und $(\langle a_i \rangle \, b)\,c \; {}^{5}\!\rhd_{\beta} \; e\,\tilde{c}$ mit $c \rhd_{\beta} \tilde{c}$ und $\langle a_i \rangle \, b \; {}^{k'}\!\rhd_{\beta} \; e$, dabei ist $k' = 1,3,5,8$ möglich.

Zunächst kann man die Behauptung für die Fälle $k' = 1,3,5$ sofort mit der N.I.V. beweisen.

Für $k' = 8$ hat man dann $\langle a_i \rangle \, b \; {}^{j'}\!\rhd_{\beta} \; e_1 \rhd_{\gamma,n'} e$ mit $j' < 8$ und $\gamma < \beta$. Aus der Gestalt von $\langle a_i \rangle \, b$ folgt $j' \in \{1,3,5\}$. Es ergibt sich das Diagramm

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& & (\langle a_i\rangle\, b)\, c \arrow[dl, dash, "\alpha"'] \arrow[dr, dash, "\beta"] \arrow[dd, phantom, "(+)"] & & \\
& \langle a_i'\, c'\rangle\, b' \arrow[dr, dash, "\beta"'] \arrow[ddrr, dash, bend right=40, "\beta"'] & & e_1\, \tilde{c} \arrow[dl, dash, "\alpha"] \arrow[dr, dash, "\gamma, n'"] \arrow[dd, phantom, "(++)"] & \\
& & d \arrow[dr, dash, "\gamma, n'"'] & & e\, \tilde{c} \arrow[dl, dash, "\alpha"] \\
& & & \hat{d} &
\end{tikzcd}$$

wobei (+) aus dem vorher Bewiesenen und (++) wegen $\alpha \# \gamma < \alpha \# \beta$ aus der I.V. folgt.

Nachdem die Behauptung für die Fälle $j,k \in \{1,..,7\}$ bewiesen ist, können die restlichen Fälle behandelt werden.

$j \in \{1,..,7\},\ k = 8$:

$c \overset{8}{\underset{\beta}{\rhd}} \tilde{c} \Rightarrow c \overset{k'}{\underset{\beta}{\rhd}} e \underset{\gamma,n'}{\rhd} \tilde{c}$ mit $k' \in \{1,..,7\}$ und $\gamma < \beta$.

Es ergibt sich

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& & c \arrow[dl, dash, "\alpha"'] \arrow[dr, dash, "\beta"] \arrow[dd, phantom, "(+)"] & & \\
& c' \arrow[dr, dash, "\beta"'] \arrow[ddrr, dash, bend right=40, "\beta"'] & & e \arrow[dl, dash, "\alpha"] \arrow[dr, dash, "\gamma, n'"] \arrow[dd, phantom, "(++)"] & \\
& & d \arrow[dr, dash, "\gamma, n'"'] & & \tilde{c} \arrow[dl, dash, "\alpha"] \\
& & & \hat{d} &
\end{tikzcd}$$

wobei (+) aus den vorher behandelten Fällen und (++) aus der I.V. folgt.

$j = k = 8$.

Man beweist diesen Fall in analoger Weise unter Verwendung des vorigen Falles.

2) $n \geq 1$, $m = 1$ Nebeninduktion nach n mit Hilfe von 1) .

3) $n \geq 1$, $m \geq 1$ Nebeninduktion nach m mit Hilfe von 2) .

Für die Theorie der primitiv rekursiven Funktionale endlicher Typen, formuliert mit unendlich langen Termen nach Tait [4] , werden bei den angegebenen Reduktionsregeln nur Ordinalzahlen $< \varepsilon_0$ zugelassen. Der dadurch sich ergebende Reduktionsbegriff ist stark genug, um die Normalisation der Terme durchführen zu können. Um auch die verwendeten Induktionen über die Länge von Termen einschränken zu können, läßt man nur Terme mit einer durch eine geeignete feste Ordinalzahl beschränkten Länge zu. Es ist dann beim Church Rosser Theorem mitzubeweisen, daß die Länge der zur Ergänzung der Diagramme benötigten Terme diese Schranke nicht überschreitet. Mit dieser Methode wurde in Maaß [2] durch Transfinite Induktionen bis $\varkappa_0$ das Church Rosser Theorem für ein Funktionalsystem mit unendlich langen Termen bewiesen, in dem die prädikative Analysis interpretiert werden kann.

LITERATUR

[1] J.Y.Girard, Theoreme de Church-Rosser pour un systeme de termes infinis. (unveröffentlicht)

[2] W.Maaß, Eine Funktionalinterpretation der prädikativen Analysis. Dissertation an der Universität München (1974)

[3] S.Stenlund, Combinators, λ-Terms and Proof Theory. D.Reidel Publishing Company, Dordrecht (1972)

[4] W.W.Tait, Infinitely long terms of transfinite type. In: Formal systems and recursive functions (ed. Crossley/Dummett), S. 176-185.